DELLE PROPRIETÀ
della
STREFOIDE

CURVA ALGEBRICA DEL TERZO GRADO
RECENTEMENTE SCOPERTA ED ESAMINATA

DAL DOTT. ENRICO MONTUCCI

MEMORIA

PRESENTATA E LETTA ALL' IMP. E REAL ACCADEMIA
DELLE SCIENZE DI SIENA, DETTA DEI FISIOCRITICI
Li 27. Luglio 1837.

CON UNA

APPENDICE

IN CUI SI PROVA NON AVER LUOGO LA SUPPOSTA GENERALITÀ
DELL' EQUAZIONE DI CONTINUITÀ DEI FLUIDI, PROPOSTA
DAL VENTUROLI ED ALTRI AUTORI D' IDRAULICA

Ut desint vires, tamen est laudanda voluntas.
Ovid. L. III. de Pont. Eleg. 4.

SIENA
Presso Guido Mucci
1837.

Non vi ha scienza a parer mio, o Signori, che sì poco incoraggisca lo spirito indagatore, quanto la Matematica pura. Mentre vediamo la Chimica in uno stato tale, che non passa un decennio senza seco portare la necessità di rifondere le opere esistenti, e che perciò infiniti stimoli risvegliano l'amore delle ricerche, e giornalieri trionfi eccitano l'ambizione scientifica dei più alti talenti Europei, — mentre innumerevoli sono in Fisica i punti controversi che dan libero campo all'acume tanto inventore che polemico, — è rimasta pressochè esaurita la sola Matematica. Già la quadratura del circolo, la trisezione dell'arco, la duplicazione del cubo, che tanto occupavano i nostri padri, sono quasi derise dai più provetti moderni; un Newton, un Leibnitz, un Lagrange han reso sterile il campo, e tranne alcuni pochi soggetti di ricerca puramente astratti, nulla resta forse onde arricchire la Scienza; talchè simile al Principe Macedone, che le paterne conquiste invidiava, dovrà in breve il Matematico esclamare, che i nostri padri han già tutto scoperto.

In una tanta penuria di soggetti d'indagine l'unica strada forse, che qualche vantaggio prometta, è l'esame delle curve algebriche e trascendenti. Molte e

gravi penne hanno in vario modo aumentate e dilucidate le teorie relative a quest' importante ramo della Scienza; ma per lo più tali ricerche limitate si sono alle generali proprietà, senza arrestarsi alle sole talvolta sterili particolarità. Come sia successa una simil negligenza, dopo che le Sezioni Coniche ed alcune curve trascendenti hanno con delle esimie proprietà provata la loro importanza nella Fisica in specie, è difficile decidere, mentre questo campo non esplorato offra tuttora delle rimarchevoli ed interessanti nozioni.

Egli è vero però che le indagini su tal materia non possono portare una utilità così vasta, come le ricerche negli altri rami della Matematica; Ma non per questo devonsi trascurare le prime, essendovi sempre speranza che un felice confronto anche accidentale possa di una invenzione apparentemente inutile fare una interessante applicazione. Già da qualche tempo allettato dalla varietà delle curve tanto algebriche che trascendenti, ne feci uno studio particolare, e mi posi alla ricerca di varie combinazioni di rette onde vedere il luogo geometrico che ne risulterebbe, e ciò per persuadermi individualmente, se veramente fosse così sterile come a tanti era parso, questo genere di esame.

Che se anche per se medesima non sarebbe per avere grand' utilità una curva che potesse nuova trovarsi, utile sarebbe almeno per un' esempio allo studente, il quale oltrepassate le sezioni coniche cerca ansiosamente dei soddisfacenti esempj di curve di un grado superiore al secondo, onde farsene una idea, nè vi trova che la concoide e la cissoide ambe sterili, e la seconda senza applicazione veruna, mentre la prima ne ha una appena in Architettura, ed ormai dai migliori architetti abbandonata.

Non dirò dunque di tante curve di costruzione facile ed elegante che durante le mie indagini mi si presentarono; e serbo ad altro tempo l'esporre a quest'Ac-

cademia le interessanti osservazioni affacciatemisi riguardo ad alcune proprietà generali delle curve, ristringendomi soltanto a descrivere le moltiplici proprietà di una curva del terzo grado, del genere delle annodate, e che credendola degna di un nome particolare, ho denominato *strefoide* dal greco *στρέφω*, io *intreccio*. L'estrema facilità di descrivere questa curva e le combinazioni rimarchevoli che offre, la rendono di poco inferiore, se pure in alcun grado lo è, alle Sezioni Coniche, come in appresso ognuno si persuaderà.

1. Dall'origine A (fig. 1) di un'asse qualunque indefinito, si partano vari *raggi vettori* AMm, segando in diversi punti Z una *direttrice* CZ applicata ad un punto qualunque C dell'asse cui sia inclinata ad angolo ϕ, e dicasi a l'asse AC. Ogni raggio vettore sia segato da una curva incognita in due punti M, m, uno a destra, e l'altro a sinistra della direttrice CZ, tali che sia costantemente $\overline{CZ}^2 = MZ \times Zm$, e di più $MZ : mz :: a : b$, essendo b una costante qualunque. Queste due condizioni limitano la curva, di cui cerchiamo l'equazione generale.

2. Sia $AP = x$, $PM = y$, poco importando, se le ordinate parallele alla direttrice si prendano di quà o di là da essa; sia $CZ = z$, $MZ = m$, $mZ = n$. Abbiamo per ipotesi (α) $z^2 = mn$; e (β) $mb = na$. La figura ci dà l'analogia $x : y :: a : z$, quindi . . . . .
$z^2 = \frac{a^2y^2}{x^2} = mn$, onde $n = \frac{a^2y^2}{mx^2} = \frac{mb}{a}$. ($\gamma$)
Nuovamente la figura ci dà:
$x : a - x :: \sqrt{(x^2 + y^2 + 2xy\,cs\phi)} : m$ *; quindi:

---

* Sono solito di usare invece di *sen.* il segno *sn*; per *cos* il segno *cs*, e per *tang.* il segno *tg*.

$m = \frac{a-x}{x} \sqrt{(x^2 + y^2 + 2xy \cos\varphi)}$, qual valore sostituito oell' equazione (γ) dà

$$\frac{a^2 y^2}{x(a-x)\sqrt{(x^2+y^2+2xy\cos\varphi)}} = \dots\dots\dots \frac{b(a-x)\sqrt{(x^2+y^2+2xy\cos\varphi)}}{ax}$$

Risolvendo questa equazione di secondo grado rispetto ad y, troveremo:

$$(\delta) \qquad y = \frac{b(a-x)x}{a^3 - b(a-x)^2} \times \dots\dots\dots$$

$$\left\{ (a-x)\cos\varphi \pm \sqrt{\left(\frac{a^3 - b(a-x)^2}{b} + (a-x)^2 \cos^2\varphi\right)} \right\}$$

equaziona generala alla carcata curva, da cui vediamo esser questa munita di due rami dalla parte positiva della x, e fatto x negativa, di due altri rami dalla parta negativa. Venendo $x > a$, è necessario cangiare $a - x$ in $-(x-a)$. L' equaziona poi dimostra che $x = 0$ ed $x = a$ danno egualmente $y = 0$, onde la curva sega l'asse in due parti, cioe nell'origine A, e nel puoto C ove cade la direttrice; y ha dua valori, uno positivo a l'altro negativo, in conseguenza del doppio segno radicale; ma non saranno eguali fra loro le rispettive y positive e quelle negative, onde la curva non è simmetrica attorno il suo asse. La x positiva da $y = \infty$ tostochè sarà $a^3 = b(x-a)^2$ onde $x = a + a\sqrt{\frac{a}{b}}$, al qual punto s' inalzerá un' asintoto alla curva. La x negativa dà due altri rami infiniti, a cui trovaremo un' altro asintoto alla distanza dall' origina $x = a\sqrt{\frac{a}{b}} - a$. Onde tra l' un' asintoto e l'altro l' asse ha la lun-

ghezza $2a\sqrt{\frac{a}{b}}$. La curva d'altronde tra A e C forma un nodo, terminato come ho detto, da due rami per parte.

3. Per la costruzione della curva trovata useremo le due ipotesi fondamentali indicate (1. α. β.); ma poichè la Geometrìa elementare non offre, che sappia io, un problema per soddisfare alle due condizioni di $z^2 = mn$, ed $m : n :: a : b$, premetterò il seguente lemma elementare.

Trovare un rettangolo, i cui lati m, n *stieno nella proporzione di* a: b, *e che sia uguale ad un dato quadrato di lato* z.

Sia (*Fig.* 5.) $AC = a$, $CB = b$. Trovata a queste rette la media proporzionale DC, questa si prolunghi indefinitamente, e si conducano le indefinite DE, DG. Presa poi sopra DC la porzione $DF = z$, per F conducasi EG parallela; dico essere $EF = m$, $FG = n$ i due lati richiesti del cercato rettangolo.

Infatti abbiamo evidentemente $EF : FG :: AC : CB$, ed $EF \times FG = \overline{DF}^2 = z^2$, il che ec.

Facile è adesso la costruzione della curva cercata. Sull'indefinita DC si prendano delle parti $DF = CZ$ (*Fig.* 1. 5.) e per ciascun punto F condotta la parallela ad AB, si trasportino sul raggio vettore le porzioni $MZ = EF$, $Zm = FG$, e così si otterranno due punti della curva per ogni punto F, ossia Z.

4. Per semplicizzare la trovata equazione, si faccia $c\varphi = o$ onde render perpendicolare tanto la direttrice quanto le ordinate, e si otterrà : . . . . . .

$$(\xi) \qquad y^2 = \frac{b(a-x)^2\, x^2}{a^3 - b(a-x)^2}$$

equazione alla *Strefoide scalena*, che troviamo essere una curva algebrica di quarto grado, simmetrica

attorno l'asse Vediamo con $x = o$ ed $x = a$ farsi $y = o$, onde la curva taglia l'asse nell'origine, ed un altra volta nel punto C ove s'inalza la direttrice. Al di là del punto C progredisce la curva in due rami finche non sia $a^3 = b(a-x)^2 = b(x-a)^2$ che dà: $x = a + a\sqrt{\frac{a}{b}}$, ed $y = \infty$, al di là del qual punto i valori di y verranno immaginarj. Fatto x negativa, la curva progredisce per due altri rami, finchè non sia $a^3 = b(a+x)^2$, onde $x = a\sqrt{\frac{a}{b}} - a$, ed $y = \infty$, ad un punto corrispondente a quello positivo. Al di là di questo punto ritornano i valori immaginarj Onde la strefoide scalena ha due asintoti, uno positivo, e l'altro negativo, appartenenti ciascuno ad una coppia diversa di rami della curva.

5. Fatto $a = b$, otterremo la *Strefoide equilatera*, la cui equazione si trova $y^2 = \frac{x(a-x)^2}{2a-x}$, e la cui costruzione è tanto agevole, (perche allorquando $a = b$, viene $m = n = z$) che le si adatta perfino il moto continuo.

6. Prima di esporlo però osserveremo, esser questa una curva algebrica di terzo grado, onde la semplicizzazione introdotta ha abbassato di un grado l'equazione. $x = o$ ed $x = a$ danno egualmente $y = o$, onde la curva taglia l'asse prima nell'origine A, e ritorna a segarlo nel punto C ove s'inalza la direttrice. L'ascissa negativa dà per y dei valori immaginarj, onde al di là dell'origine non esiste curva. Questa poi fatto $x > a$, progredisce in due rami infiniti che hanno per asintoto una retta perpendicolare all'asse nel punto ove $x = 2a$, perché ivi y viene infinita Al di là di questo punto i valori vengono immaginarj

Dunque riassumando, la strefoide equilatera,

l'unica di cui da' quì in avanti ci occuperemo, appartiene al genere delle annodate, e asintotica, simmetrica attorno il suo asse, e per le cose dette è costruttibile per punti come segue.

7. Preso (*Fig.* 2.) un asse $AB = 2a$, e bisecato in C, sul punto C s'inalzi la perpendicolare CZ che sarà la direttrice, e sull'estremità B la perpendicolare BO che sarà l'asintoto. Indi condotti varj raggi vettori $AMZm$ dall'origine A, si faccia sopra ciascuno $CZ = z = MZ = Zm$, e così si determineranno i punti M del nodo, ed m dei rami, ripetando la medesima costruzione sotto l'asse.

8. Da ciò si deduce un modo di descrivere la strefoide per moto continuo. Determinato un'asse AB, sul suo mezzo C si adatti perpendicolarmente una riga CT, alla cui cima T sta fissato un filo dell'esatta lunghezza CT. Al punto A adattata poi una riga AM mobile attorno al punto A, si faccia in z scorrere uno stilo che tenga obbligato il filo contro la riga CT, mentre un'altro stilo scorrente lungo Am lo terrà egualmente teso. Così si otterrà la strefoide segnata per mezzo dello stilo M, ripetendo l'operazione pei rami e di sopra e di sotto dell'asse.

Infatti così sarà costantemente $MZ = ZC = Zm$, il che ec.

9. Poiche dunque così ogni raggio vettore determina due punti della curva, uno nel nodo, ed uno nel ramo corrispondente, chiamerò le ordinate appartenenti a questi punti *ordinate convette*, e similmente le loro ascisse saranno *ascisse convette*. Il punto C dirassi il *Centro della Curva*.

10. Cangiato x in $a - x$, ed $a - x$ in x, si otterrà l'equazione della curva al centro, cioè pel nodo $y^2 = \frac{x^2(a-x)}{a+x}$, ove fatto x negativo avremo

pei rami $y^2 = \frac{x^2(a+x)}{a-x}$.

11. Nell'equazione all'origine, allorchè viene $x > a$, basta cangiare $a - x$, in $x - a$.

12. Il valore di z con l'equazione al centro si trova pel nodo $z = \frac{ay}{a-x}$, e $z = \frac{ay}{a+x}$ pei rami. L'equazione all'origine poi darà costantemente $z = \frac{ay}{x}$.

13. Dalla sola ispezione della Fig. 3. resultano i seguenti teoremi.

1°. *Le ordinate convette stanno fra loro come le rispettive ascisse.* Infatti abbiamo $AP . PM :: Ap . pm$

2°. *Le ordinate convette sono costantemente equidistanti dal centro.* Infatti poichè $MZ = Zm$, sarà anche $CP = Cp$.

3°. *Condotte dagli apici di due ordinate convette due corde al centro MC nel nodo, ed mC al ramo, sarà costantemente l'angolo MCm formato dalle due corde un'angolo retto.* Infatti per la costruzione della curva i punti M, C, m appartengono ad un circolo di centro Z e diametro Mm. Tali corde si diranno *corde convette.*

14. Le espressioni della tangente, suttangente, normale, e sunnormale si dedurranno dalle note formule generali differenziali di queste funzioni, cioè la tangente $= \frac{yds}{dy}$; la suttangente $= \frac{ydx}{dy}$; la normale $= \frac{yds}{dx}$, e la sunnormale $= \frac{ydy}{dx}$, che daranno:

1°. *Con l'equazione all'origine:*

La tang $MT = \frac{a(a-x)}{(a-x)^2 - ax} \sqrt{\frac{x(a^2+2ax-x^2)}{2a-x}}$

La suttang. $PT = \frac{x(2a-x)(a-x)}{(a-x)^2 - ax}$

La normale $MN = \frac{a(a-x)}{(2a - x^2} \sqrt{(a^2+2ax-x^2)}$

La sunnorm. $PN = \frac{(a-x)((a-x)^2 - ax)}{(2a-x)^2}$

ove quando $x > a$ si cangia $a-x$ in $-(x-a)$.

2° *Con l'equazione all'origine.*

$$MT = \frac{ax}{a^2-ax-x^2} \sqrt{\frac{(a-x)(2a^2-3x^2)}{a+x}}$$

$$PT = \frac{x(a^2-x^2)}{a^2-x^2-ax}$$

$$MN = \frac{ax}{(a+x)^2} \sqrt{(2a^2-3x^2)}$$

$$PN = \frac{x(a^2-x^2-ax)}{(a+x)^2}$$

ove per applicare dette espressioni ai rami, conviene cangiare x in $-x$.

15. Fatto $x = a$ nelle espressioni all'origine, oppure $x = 0$ in quelle al centro, tutte queste funzioni si annullano, cioè la tangente al centro è priva di qualunque di dette funzioni

16. Per riscontrare se vi sia una ordinata eguale all'ascissa corrispondente, facciasi $x = y$ prima nell'equazione al centro, che dà un assurdo, indi nell'equazione all'origine, che dà $y = a \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$, onde contando dall'origine vi sono due ordinate eguali alle rispettive ascisse, contando dal centro però non ve ne sono

17 Per la massima ordinata nel nodo troviamo $x = -\frac{a}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{5}$ con l'equazione al centro;

onde approssimativamente $x = \frac{3}{5} a$, ed $y = \frac{3}{10} a$ col segno superiore, il segno inferiore dà un assurdo, cioè non si può trovare pei rami una massima ordinata fuorchè l' infinito. L' ordinata convetta della massime ordinata del nodo verrà prossimamente $y' = \frac{6}{5} a$. Onde *l'ordinata massima nel nodo è la metà dell' ascissa dal centro, e la sua ordinata convetta è doppia della medesima ascissa.*

18. Sia ξ l' angolo che fa la tangente MT coll' asse, sarà $MT : y :: 1 : \text{sn}\xi$, onde: . . . .
$\text{sn}\xi = \frac{y}{MT} = \frac{a^2 - x^2 - ax}{a\sqrt{(2a^2 - 3x^2)}}$, usando l' equazione al centro.

Ora volendo sapere a quale angolo la tangente al centro tagli l' asse, fatto $x = 0$, viene $\text{sn}\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} = ..$
$= 0{,}7071068 = \text{sn}45^\circ$.

19. Dunque 1°. *la Strefoide taglia l'asse costantemente a* 45°, perciò 2°. *le tangenti al centro si tagliano ad angoli retti.*

20. *Le strefoidi sono curve simili.* Infatti supposta una strefoide di asse a, ed un' altra di asse ma, ed in esse prese le ascisse nell' istessa ragione di $1 : m$, detta y l'ordinata della prima, y' quella della seconda, avremo $y^2 : y'^2 :: \frac{x(a-x)^2}{2a-x} : \frac{mx(ma-mx)^2}{2ma-mx}$, ossia $y : y' :: 1 : m$. Dunque supposte due strefoidi che abbiano comune o l'origine o il centro, qualunque corda condotta da uno di questi due punti, sarà segata dalle due curve in ragione degli assi, e tutte le corrispondenti funzioni saranno ai medesimi proporzionali.

21. Poichè $z = \frac{ay}{x}$, in un altro punto sarà $z' = \frac{ay'}{x'}$;

quindi due importanti analogie, $a : z' :: x'y : xy'$; ed $y : y' :: xz : x'z'$.

22. Si cerchi il punto in cui la tangente corra parallelamente all'asse. Fatto (18.) $\xi = 0$, viene $x = \frac{a}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{5}$, valore (17.) dell'ascissa corrispondente alla massima ordinata, a cui dunque corrisponde ad angoli retti la tangente cercata.

23. Abbiamo $Mm : mC :: \frac{2ay}{x} : \sqrt{(y^2 + (x-a)^2)} :: \sqrt{2a} : \sqrt{x}$ sviluppando; abbiamo poi $mC . mp :: \sqrt{(y^2 + (x-a)^2)} : y :: \sqrt{2a} : \sqrt{x}$, onde nasce l'importante proprietà che $Mm : mC : mp$, dunque i due triangoli rettangoli MCm, Cmp sono simili.

24. Questa asserzione dipende da una proposizione di geometria elementare, che credo non sia stata da verun autore osservata, trascuratezza assai strana, trattandosi di una proprietà del triangolo rettangolo analoga e quella che gli appartiene riguardo all'eguaglianza. Voglio dire che per tutto trovasi dimostrato che i triangoli rettangoli che hanno due lati analoghi eguali sono eguali fra loro; ma in nessun libro d'elementi che sappia io, vedo dimostrare, che i triangoli rettangoli che hanno due lati omologhi proporzionali sieno fra loro simili, proposizione senza la quale io non potrei qui dimostrare alcune delle più interessanti proprietà di questa curva, come in breve vedremo. Ora sarebbe ridicolo il supporre che questa proprietà del triangolo rettangolo non fosse stata da nessuno avanti osservata, tanto più che può dedursi comodamente come corollario dalla Proposizione 7. del Libro VI. di Euclide; trovo reprensibile per altro che si sia disprezzata una così utile virtù del triangolo rettangolo, quando in tanti autori, e segnatamente in Legendre si vedono con pompa dimostrare degli assiomi, che il solo

senso comune renderebbe visibile al più ignorante villano, tale sarebbe per esempio, l'interessante proposizione, che: „ *tutti gli angoli retti sono fra loro eguali* „ enunciato che figura assai male in un' opera d'altronde pregevolissima.

Darò intanto qui la dimostrazione diretta del teorema mancante, che enuncio così:

I triangoli rettangoli che hanno due lati omologhi proporzionali, saranno simili fra loro.

Osservo in primo luogo, che se l'angolo compreso tra i lati proposti sia l'angolo retto, i due triangoli sono già dimostrati simili, onde qui considero soltanto il caso in cui l'angolo compreso sia uno degli acuti.

Sieno dunque ABC, DEF (*Fig.* 4) i due triangoli rettangoli in G ed F, ed attorno gli angoli A, D sieno proporzionali i lati, cosicchè sia $AB : AC :: DE : DF$, dico che essi triangoli saranno simili.

Infatti presa $AH = DF$, $AG = DE$, abbiamo per ipotesi $AB : AC :: AG : AH$, dunque GH è parallela a BC, e perciò il triangolo AGH è rettangolo ed eguale a DEF, per avere due lati eguali con esso. Dunque DEF è simile ad ABC, il che ec.

25. Ritornando ora alla Strefoide (*Fig.* 3.) il triangolo MPC formato dall'ordinata convetta del nodo con la sua corda convetta e parte dell'asse, avendo perpendicolari i suoi lati a quelli del triangolo esterno Cmp, gli è simile anch'esso, onde avremo tra le due ordinate convette un sistema di tre triangoli simili invariabilmente retti; quali triangoli distingueremo come altre funzioni della curva, col nome di *triangoli convetti*.

26. Da questa combinazione di triangoli simili, scaturisce l'interessante proprietà di questa curva, che cioè *le corde convette MC, Cm bisecano i rispettivi angoli fatti dal raggio vettore con le due ordinate convette*, bisecano cioè gli angoli PMZ, Zmp.

Infatti i due triangoli simili MCm, Cmp danno l'angolo $MmC =$ ang. Cmp, ed i due triangoli simili MPC, CMm danno ang $PMC =$ ang CMm, il che ec.

27. *Le tangenti al centro fanno angoli eguali con qualunque coppia di corde convette* Infatti l'angolo MCm è costantemente eguale all'angolo NCQ, essendo ambedue retti (13. 3°. 19), onde tolto di comune l'angolo NCm, resta $MCN = mCQ$, il che ec.

28. Similmente *l'angolo fatto da una delle corde convette con l'asse è eguale all'angolo fatto dall'altra corda convetta con la direttrice*, cioè sarà $MCP = mCZ$; $MCZ = mCp$ Infatti $PCZ = MCm = ZCp$; onde nel primo caso tolto di comune MCZ, nel secondo ZCm, viene l'assunto.

29 Volendo esprimere le funzioni dei rami in funzioni convette del nodo, vediamo essere l'ascissa convetta dei rami $x' = 2a - x$, e l'ordinata corrispondente convetta $y' = \frac{(a-x)\sqrt{(2a-x)}}{\sqrt{x}}$.

30. Un circolo descritto sull' asse $2a$ come diametro, e che perciò si dirà *circolo circoscritto alla Strefoide*, sega il ramo della curva in un punto corrispondente all' ascissa $\frac{3a}{2}$. Infatti fatto $x = \frac{3a}{2}$, viena $y = \sqrt{\frac{3}{4}a^2}$, onde $Cm = \sqrt{\left(\frac{3}{4}a^2 + \left(\frac{3a}{2} - a\right)^2\right)} = a$, dunque a quel punto precisamente corrisponde il raggio del circolo predetto, onde ec. Ne viene che allora l'angolo $mCp = 60°$.

31 Darò altrove un' accenno dell' utile applicazione che può farsi del circolo tanto alla costruzione quanto all' esame delle curve in generale, ristringendomi qui a darne una prova nella Strefoide che ritrae da questa combinazione qualcheduna delle sue più belle proprietà.

Suppongasi dunque una ordinata della strefoide estesa o abbreviata in modo da divenire insieme l'ordinata del circolo circoscritto. Detta u questa ordinata così modificata, avremo pel circolo circoscritto $u^2=a^2-x^2$, e l'equazione (10.) alla strefoide dal centro $y^2=\frac{x^2(a-x)}{a+x}$ per le ordinate del nodo

Per verificare se il nodo possa avere col circolo circoscritto alcuna ordinata comune, si faccia $u^2=y^2$, e paragonati fra loro i secondi membri, scaturisce $x=a+x$, lo che è assurdo.

Fatto $y^2>u^2$, viene similmente l' assurdo $x>a+x$, onde concluderemo che il circolo non taglia il nodo in verun punto M: poichè $x=a$ rende nulli tanto u che y, resulta che il circolo tocca il nodo nell'origine A.

Nei rami poi la cosa è diversa. Poichè essendo allora $y^2=\frac{x^2(a+x)}{a-x}$, avremo $x=a-x$, onde $x=\frac{a}{2}$, che corrisponde a quanto nell'articolo 30. fu stabilito. Nè $y<u$ nè $y>u$ danno degli assurdi, onde viene che il circolo sega ogni ramo in un punto solo, come sopra detto, e nel resto non vi è limite di proporzione tra le ordinate della strefoide e quelle del circolo circoscritto.

32. Dall' equazione intanto del circolo all' origine $u^2=2ax-x^2$, si ottiene (o) $\frac{u^2}{x}=2a-x$, che sostituito nell'equazione all'origine della strefoide . . . $y^2=\frac{x(a-x)^2}{2a-x}$ dà la semplicissima equazione (ϱ) $y=\frac{x(a-x)}{u}$, d' onde: (ς) $y:x::a-x:u$, analogia interessantissima.

32. *a*. Usando le equazioni al centro, il circolo ci dà $\frac{u^2}{a \pm x} = a \mp x$, valore che introdotto nell'equazione al centro della Strefoide: $y^2 = \frac{x^2(a \pm x)}{a \mp x}$, da $y^2 = \frac{x^2(a \pm x)^2}{u^2}$ ove il segno superiore appartiene ai rami, cioè $(\tau)\ y = \frac{x(a \pm x)}{u}$

Dall'altro canto poichè $u^2 = a^2 - x^2$ a . . . $y^2 = \frac{x^2(a \pm x)}{a \mp x}$, avremo . . . . :
$u^2 : y^2 :: a^2 - x^2 : \frac{x^2(a \pm x)}{a \mp x}$, cioè pel nodo, $u : y :: a + x : x$ e pei rami $u : y :: a - x : x$, lo che dà in generale $y = \frac{ux}{a \mp x} (\phi)$ altro valore interessante di y considerata dal centro, che, cangiato x in $a - x$, dà pell'origine $y = \frac{u(a-x)}{2a-x}$. (χ).

Moltiplicando fra loro le equazioni (τ), (ϕ), si ritorna all'equazione della curva.

32 *b*. Questo valore resta il medesimo, ancorchè la direttrice e perciò le ordinate non fossero ad angolo retto. Infatti (2) facendo nell'equazione (δ) $a=b$, si otterrà l'equazione alla *strefoide equilatera obliqua*
$$y = \frac{a-x}{2a-x}\left((a-x)\cos\phi \pm \sqrt{(2ax - x^2 + (a-x)^2 \cos^2\phi)}\right)$$
Ora l'equazione al circolo circoscritto, preso per asse $2a$, e le ordinate inclinate al medesimo angolo ϕ sarà $u = (a-x)\cos\phi \pm \sqrt{(2ax - x^2 + (a-x)^2 \cos^2\phi)}$, qual valore sostituito nel valore di y, darà egualmente l'equazione (χ) $y = \frac{u(a-x)}{2a-x}$. 3

32. *c*. Onde veniamo a discoprire una nuova interessante proprietà della strefoide equilatera tanto retta che obliqua, cioè, *che congiunta la cima dell'ordinata al circolo circoscritto dalla parte del nodo con l'estremità dell'asse verso l'asintoto, la retta così condotta sarà parallela alla corda convessa interna della strefoide, appartenente al punto corrispondente alla medesima ordinata*, cioè congiunta $m'b$, sarà $m'B$ parallela ad MC. Infatti sarà sempre PB : PC :: Pm' : PM, ossia $2a - x$: $a - x$ :: u : y che ec.

32. *d* Quindi congiunta Am', l'angolo $Am'B$ essendo costantemente retto, e tale essendo ancora l'angolo MCm, circostanze che si verificano nella strefoide equilatera tanto retta che obliqua (13. 3°), ne viene la strana combinazione, che *MC parallela ad mB, è perpendicolare ad Am', e Cm parallela ad Am' è perpendicolare ad $m'B$.*

32. *e*. Onde nasce un nuovo metodo di costruire la strefoide equilatera per punti, metodo generale per l'obliqua e per la retta. Sull'asse $2a$ descritto il circolo, gli si conducano le ordinate oblique o rette secondochè si vorrà costruire l'una o l'altra strefoide. Indi si congiunga la cima m di ogni ordinata compresa entro lo spazio AC con i punti A, B, mediante le rette Am', $m'B$. Indi dal punto C conducasi parallela al $m'B$ la retta MC fino al suo incontro nel punto M dell'ordinata Pm'. Il punto M sarà un punto del nodo. Dal medesimo punto C poi condotta la Cm parallela ad Am', finchè non incontri nel punto m quell'ordinata del circolo, che è equidistante con la Pm' dal centro C, si otterrà il punto m convesso del ramo. Questo metodo è utilissimo per determinare specialmente i punti vicini all'origine A, che col metodo del § 7 difficilmente si hanno, in conseguenza delle troppo grandi aperture di compasso.

33. Condotto dunque il raggio Cm' all'estremità dell'ordinata al circolo Pm', saranno simili per l'analogia (5) (32) i triangoli CPm', APM, Apm, onde

34. *La tangente al circolo circoscritto alla Strefoide dalla parte del nodo è costantemente parallela al raggio vettore del corrispondente punto della curva.*

Infatti il triangolo $T'm'C$ essendo simile al triangolo $Pm'C$, ossia ad APM, ne viene che l'angolo $MAP = m'T'C$, dunque ec.

E perciò *il raggio vettore è sempre perpendicolare al raggio condotto al punto corrispondente del circolo.*

35. Essendo quindi eguali i triangoli MVC, MPC, ne viene che

La corda connetta interna biseca ancora l'angolo fatto dall'asse col raggio condotto al punto corrispondente del circolo, e per conseguenza biseca anche la corda al circolo condotta dall'origine all'estremità dell'ordinata u.

36. E da ciò nasce un nuovo sistema di triangoli simili, venendo ad esser tali i triangoli MPC, MAO, MOm', MVC, ed APm', e quindi l'angolo . . $mAC = CMP$.

37. Abbiamo $x^2+y^2 = x^2 + \frac{x(a-x)^2}{2a-x} = \frac{a^2x}{2a-x}$,

onde (32) $\sqrt{(x^2+y^2)} = \frac{ax}{u} = AM$.

38. Detto dunque ϕ l'angolo AMP, vengono le seguenti equazioni

1°. $\sin\phi = \frac{u}{a}$ (33)

2°. $\cos\phi = \frac{uy}{ax}$ (37) $= \frac{a-x}{a}$ (32. (6))

3°. $y = \frac{a x \cos\phi}{u} = \frac{x \cos\phi}{\sin\phi}$ (1°. 2°.)

4° $MAP = 90° - \varphi$.

5°. $ZMC = CMP (26) = 90° - PCM = 90° - \frac{PCm'}{2}$ (35)

$= 90° - \frac{\varphi}{2}$ (33.) $= ZCM$.

6°. Quindi $PCM = \frac{\varphi}{2}$ (38 5°.) ossia:

L' angolo fatto dalla corda convetta interna con l' asse è costantemente la metà di quello fatto dal raggio vettore coll' ordinata; onde:

7° $mCZ = Cmp = 90° - MCZ = \frac{\varphi}{2}$, relazioni interessantissime.

3°. Poichè $Am' = \sqrt{(x^2 + u^2)} = \sqrt{2ax}$, ed . . . $Am' : x :: MC : y$ (36) viene $MC = \frac{y}{x}\sqrt{2ax}$; di più $AO : OM :: PC : PM$, ossia $\frac{\sqrt{2ax}}{2} : OM :: a - x : y$, quindi $OM = \frac{y\sqrt{2ax}}{2(a-x)}$ e finalmente $CO = MC + MO =$ . . $\frac{y(2a-x)\sqrt{(2ax)}}{2x(a-x)} =$ (32.) $\frac{(2a-x)\sqrt{2ax}}{2u} =$ $\frac{u\sqrt{2ax}}{2x}$ (32.) Onde paragonando insieme i due valori di MC e CO, avremo $MC : CO :: \frac{y}{x}\sqrt{2ax} : \frac{u}{2x}\sqrt{2ax} :: y : \frac{u}{2}$, altra analogia importante.

40 Poichè $MV = MP$, ed $Mm' = AM$, viene $AV = u = m'P$

41 Dicasi γ l'angolo PMT che fa la tangente con la sua ordinata; avremo $AT = MT \tan\gamma$ . . . .

Ma (14. 1°.) $PT = \frac{x(2a-x)(a-x)}{(a-x)^2 - ax} =$ (32. 38. 2°.)

$\frac{x \cdot \frac{u^2}{x} \cdot a\,\mathrm{cs}\,\phi}{a^2 - ax - 2ax + x^2} = \frac{a u^2 \,\mathrm{cs}\,\phi}{a(a-x) - u^2} =$ (38. 2°.) . .

$\frac{au^2 \,\mathrm{cs}\,\phi}{a^2 \mathrm{cs}\,\phi - u^2} =$ (38. 1°) $\frac{au^2 \,\mathrm{cs}\,\phi}{a^2 \mathrm{cs}\,\phi - a^2 \mathrm{sn}^2\phi} = \frac{u^2}{\left(a1 - \frac{\mathrm{sn}^2\,\phi}{\mathrm{cs}\,\phi}\right)}$

$= \frac{u^2}{a - a\,\mathrm{sn}\,\phi\,\mathrm{tg}\,\phi} =$ (38.1°.) $\frac{u^2}{a - u\,\mathrm{tg}\,\phi}$, ed $MT =$

$\frac{a}{(a-x)^2 - ax} \times (a-x) \sqrt{\left(\frac{x}{2a-x}\right)} \times \sqrt{(a^2 + 2ax - x^2)}$

(14. 1°) = (38. 2°.) $\frac{a\gamma\sqrt{(a^2+u^2)}}{a^2\,\mathrm{cs}\,\phi - u^2} = \frac{a^2 x\,\mathrm{cs}\,\phi \sqrt{(a^2+u^2)}}{(a^2\mathrm{cs}\,\phi - u^2)\,u}$

(38. 3°) = (38. 1°) $\frac{a^2 x\,\mathrm{cs}\,\phi\sqrt{(a^2+u^2)}}{(a^2\mathrm{cs}\,\phi - a^2\mathrm{sn}^2\phi)\,a\,\mathrm{sn}\,\phi} = \frac{x\sqrt{(a^2+u^2)}}{a\,\mathrm{sn}\,\phi(1 - \mathrm{sn}\,\phi\,\mathrm{tg}\,\phi)}$

= (38. 1°.) $\frac{x\sqrt{(a^2+u^2)}}{\mathrm{sn}\,\phi(a - u\,\mathrm{tg}\,\phi)}$, onde $\mathrm{sn}\,\gamma = \frac{PT}{MT}$

$= \frac{u^2\,\mathrm{sn}\,\phi}{x\sqrt{(a^2+u^2)}}$.

42 Fermiamoci all'espressione di $PT = \frac{u^2}{a - u\,\mathrm{tg}\,\phi}$

Condotta al punto m' del circolo circoscritto la tangente $m'T'$, i triangoli simili (34) $Pm'T'$, AMP danno: $MP : AP :: 1 : \mathrm{tg}\,\phi :: m'P : PT''$, onde $MP = u\,\mathrm{tg}\,\phi$. Se dunque da PT' si tolga una porzione $T'L = a$, sarà $LP = -(a - u\,\mathrm{tg}\,\phi)$, e la suttangente $PT = \frac{u^2}{a - u\,\mathrm{tg}\,\phi} = \frac{u^2}{-LP}$, ossia terza proporzionale dopo LP ed u. Il segno negativo non indica altro, che che LP è quantità che cresce in direzione opposta a quella delle x; infatti a misura che cresce x verso C, cresce LP verso T. Ma allorquan-

do $a > u \operatorname{tg}\varphi$, viene LP positiva, perchè cade dall'altra parte dell'ordinata.

43. Ecco dunque un metodo per condurre una tangente ad un punto del nodo della Strefoide. Circoscritto il circolo, si prolunghi l'ordinata del dato punto fino al suo incontro nella periferia del circolo. A quel punto condotta la tangente al circolo medesimo, si tolga dalla sua suttangente una parte eguale al semiasse dalla parte opposta al centro della curva. Indi congiunta l'estremità dell'ordinata con l'estremità della suttangente così diminuita, si alzi all'estremità di u la perpendicolare alla retta congiungente, e dove questa perpendicolare sega l'asse, ivi sarà il termine della suttangente, e quindi è determinata eziandio la tangente.

44. Per i rami abbiamo $PT = -\dfrac{u^2}{a+u\operatorname{tg}\varphi}$, cioè la costruzione è la medesima, soltanto che dalla parte opposta conviene aggiungere a alla suttangente del circolo circoscritto, e indi procedere come sopra.

45. Ecco sulla figura esposta l'operazione in ambi i casi per maggior chiarezza.

1°. *per il nodo.*

Prolungata Pm in m' suo incontro con la periferia, ivi si conduca la tangente $m'T'$ al circolo, e da PT' tolta $T'L = a$, e congiunta Lm', a questa si innalzi la perpendicolare $m'T$. Il punto T in cui essa sega l'asse, congiunto col punto M, dà la tangente cercata MT.

2°. *per i rami*

Vogliasi condurre la tangente al punto M' del ramo inferiore. Circoscritto il circolo, gli si conduca la tangente $m''T''$ al punto m'' ove sega l'ordinata $P'M'$ del punto M'. Aggiunta alla suttangente $P'T''$ la parte $T''L = a$, e congiunta $L''m''$, si alzi sopra

questa la perpendicolare $m''p''$ che seghi l'asse in p''. Congiunta $M''p''$ sarà queste la tangente richiesta.

46. L'equazione alla strefoide al centro mendata a zero, è $\pm x^3 - ax^2 \pm xy^2 + ay^2 = 0$, e dall'origine: $x^3 - 2ax^2 + a^2 x + xy^2 - 2ay = 0$.

47. Passando alla rettificazione delle curve, l'equazione al centro dà;

$$\frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx} = \frac{ds}{dx} = \frac{a}{a+x}\sqrt{\frac{2a^2 - x^2}{a^2 - x^2}},$$

che ridotta in serie coi metodi ordinarj dà.

$$\frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{2}}{a+x}\left(a + \frac{x^2}{4a} + \frac{7x^4}{4.8a^3} + \frac{25x^6}{8.16a^5} + \frac{363x^8}{8.16.16a^7} + \frac{1335x^{10}}{8.16.64a^9} + \frac{9923x^{12}}{2.8.16.64a^{11}} + \text{ec.}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(1 - \frac{x}{a} + \frac{5x^2}{4a^2} - \frac{5x^3}{4a^3} + \frac{47x^4}{4.8a^4} - \frac{47x^5}{4.8a^5} + \frac{221x^6}{8.16a^6} - \frac{221x^7}{8.16.a^7} + \frac{3899x^8}{8.16.16a^8} - \text{ec.}\right),$$

dividendo ogni termine per $a + x$; ed integrando viene $s = \sqrt{2}\left(x - \frac{x^2}{2a} + \frac{5x^3}{3.4a^2} - \frac{5x^4}{4.4a^3} + \frac{47x^5}{4.5.8a^4} - \frac{47x^6}{4.6.8a^5} + \frac{221x^7}{7.8.16a^6} - \frac{221x^8}{8.8.16a^7} + \frac{3899x^9}{9.8.16.16a^8} - \text{ec.}\right)$

serie che non offre cose rimarchevole, ed ove per ragioni si fa x negativo.

48. Per quadrare uno spazio strefoidale entro il nodo l'equazione al centro dà:

$\int ydx = \int xdx\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$, che ridotte in serie dà:

$\int ydx = \int dx\left\{x - \frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{2a^2} - \frac{x^4}{2a^3} + \frac{33x^5}{256a^4} - \frac{99x^6}{1024a^5} + \text{ec.}\right\}$, e sviluppando l'integrale avremo:

$\int y dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3a} + \frac{x^4}{2.4a^2} - \frac{x^5}{2.5a^3} + \frac{3.11x^6}{6.256a^4} -$
$\frac{3^2.11x^7}{7.1024a^5} + $ ec., ove per volere la quadratura d'uno spazio strefoidale esteriore al nodo, si farà x negativa

49. Per trovare la superficie di rivoluzione della strefoide attorno il suo asse, abbiamo la formula della superficie $S = 2\pi \int y ds$. Ora (47)
$ds = \frac{adx}{a+x} \sqrt{\frac{2a^2 - x^2}{a^2 - x^2}}$; ed $y ds = \frac{axdx}{(a+x)^2} \times$
$\sqrt{(2a^2 - x^2)}$, onde $S = 2\pi \int y ds = \ldots$
$2\pi \int \frac{axdx}{(a+x)^2} \sqrt{(2a^2 - x^2)} = 2\pi \int \frac{xdx\sqrt{2}}{a} \times$
$\left\{a - 2x + \frac{11x^2}{4a} - \frac{14x^3}{4a^2} + \frac{135x^4}{4.8.a^3} - \frac{158x^5}{4.8\,a^4} + \frac{2169x^6}{4.8.12a^5} - \frac{2442x^7}{4.8.12a^6} + \frac{43425x^8}{4.8.12.16a^7} - \text{ec.}\right\}$ che integrando e riducendo dà $S = \pi x^2 \sqrt{2} \times \ldots$
$\left\{1 - \frac{4x}{3a} + \frac{11x^2}{2.4a^2} - \frac{14x^3}{2.5a^3} + \frac{45x^4}{4.8a^4} - \frac{79x^5}{7.8a^5} + \ldots \frac{723x^6}{4.8.16a^6} - \frac{814x^7}{4.9.16a^7} + \frac{2895x^8}{8.16.16a^8} - \text{ec.}\right\}$ serie che nulla promette d'interessante

50. Il solido generato dal nodo della strefoide nella sua rivoluzione attorno l'asse sarà:
$\pi \int y^2 dx = \pi \int \frac{x^2 dx (a-x)}{a+x} = \pi \int \frac{ax^2 dx}{a+x} -$
$- \pi \int \frac{x^3 dx}{a+x} = \pi\left(2a^3 l(a+x) - 2a^2 x + ax^2 - \frac{x^3}{3}\right)$
che darà la solidità di qualunque porzione del nodo. Fatto x negativo, si otterrà la solidità di qualunque

porzione del solido generato dai rami, che sarà

$$= \pi\left(2a^3\, l(a-x) + 2a^2 x + ax^2 + \frac{x^3}{3}\right)$$

Nell'espressione al nodo, per ottenere la solidità dell'intera noce generata dalla rivoluzione, fatto $x=a$, avremo $\pi \int y^2\, dx = 2\pi a^3 \left(l2a - \frac{2}{3}\right)$.

Nell' espressione ai rami fatto $x=a$, avremo $\pi \int y^2\, dx = \pi\left(2a^3\, l0 + \frac{10a^3}{3}\right) = -2\pi a^3\, \infty$.

51. La posizione del centro di gravità dell' arco o superficie strefoidale nulla offre d' interessante, essendo integrabile soltanto l'espressione dell' ascissa del detto centro per la calotta solida strefoidale contata dal centro della curva, e si trova per una calotta qualunque l' ascissa.

$$X = \frac{\int x y^2\, dx}{\int y^2\, dx} = \frac{8ax^3 - 12a^2x^2 + 24a^3x - 24a^4 l(a+x) - 3x^4}{12ax^2 - 24a^2x + 24a^3\, l(a+x) - 4x^3}$$

per il nodo, bastando per i rami fare x negativa.

52. Il raggio di curvatura, e l'evoluta offrono espressioni estremamente complicate, ed affatto prive d'ogni anche minima qualità interessante.

In generale debbo osservare, che non ho investigato le espressioni che sopra per altra ragione, che perchè formano il necessario accompagnamento di ogni curva, ma specialmente poi di una curva nuova, e

non ancora investigata. Così credo di aver completata la descrizione propostami, e di aver provato, che se le Sezioni Coniche sono assai superiori alla Strefoide in quanto alle moltiplici loro applicazioni, questa non è loro al certo inferiore riguardo ad ingegnose geometriche combinazioni.

Pur nonostante una applicazione di essa credo potersi fare, e non al certo del tutto indifferente. Ancora non è stato proposto un metodo soddisfacente per disegnare comodamente i caulicoli del capitello Corintio, e siccome dalla bellezza di questi dipende appunto la leggiadria dell'intero capitello, essi sono ai disegnatori oggetto di grave studio e fatica, talchè non di rado vedonsi discrepanti fra loro i migliori maestri nei metodi da loro seguiti. Crederei su questo articolo non inopportuna l'applicazione del ramo della Strefoide, che può per il §. 8. descriversi con moto continuo, usando invece del filo il crino di cavallo, come meno estendibile, e sufficientemente resistente. Seguitato detto ramo fino a quel punto del nodo cui corrisponde la massima ordinata, e evidente che verrà in tal punto l'abaco del capitello tangente alla curva, e fatto centro nel piede di detta ordinata, con un raggio ad essa eguale, può seguitarsi col metodo ordinario l'elice conoidale (mi sia concessa questa denominazione) del caulicolo.

In generale questa curva può servire, prendendone dei segmenti opportuni, e variando l'inclinazione della direttrice (32. *b.c.d.e.*) alla descrizione elegante di varie modanature del genere delle Scozie applicabili se non agli ordini d'Architettura stessi, almeno al disegno di vasche, fontane, basamenti ed altro. Presenterò fra non molto all'Accademia dei tentativi in simil genere di applicazioni.

Debbo poi, ben conscio della mia debolezza nell'arte del disegno, su questo articolo rimettermi

all' opinione dei migliori intendenti in tal materia, protestandomi di aver su ciò emesso semplicemente la mia opinione particolare; essendo il principal ornamento di questa curva non le sue applicazioni, per ora almeno, ma le sue veramente sorprendenti geometriche proprietà.

Io non ammetto, o Signori, a questa curva maggior importanza di quella che essa merita. So bene che le utili applicazioni sono il miglior ornamento d'ogni invenzione. Ma allorquando rifletto, non esser dato all' umano intendimento il prevedere i vantaggi che da anche minime sorgenti possono scaturire, ed essere in generale tutte le nuove scoperte sterili nel principio, feconde nell' avvenire, sorge in me la speranza, che se non io, qualche di me più acuto ingegno possa da questa mia fatica trarre vantaggio per il progresso della scienza. Colui che primo ideò le Sezioni Coniche, certo non prevedeva che dalla parabola si dovesse ottenere la prova della trasmissione del calorico in linea retta per ogni direzione. Nè al certo chi pose per fondamento della profonda matematica scienza il puerile assioma che a cose eguali aggiungendo o togliendo cose eguali i resultati saranno uguali, sapeva di dare origine alle interessanti teorie delle equazioni di grado superiore. L' inventore del metodo di esaustione si celebre presso gli antichi, meditava egli forse lo slancio ardito, per cui Leibnitz e Newton conquistarono alla scienza il vasto campo del calcolo infinitesimale? Perchè dunque disperare di veder qualche utile nascere anche da' più deboli tentativi? Come ogni istrumento accresciuto in una officina conduce l' artefice all' esecuzione di vie più ardui ed importanti lavori, così ogni nuova scoperta nelle Scienze suol esser gravida di rimarchevoli ed inaspettate applicazioni.

Qui termino, o Signori, la presente memoria, nella speranza di essere compatito, se troppo astruse fossero sembrate queste ricerche, essendomi io sentito ad esse trasportare nell' unica veduta di fare, se possibile, progredire quella Scienza che per la sua estesa utilità, ed immutabile precisione, può dirsi il trionfo dell'umano intendimento.

APPENDICE

NON È APPLICABILE AI FLUIDI TANTO COMPRESSIBILI CHE INCOMPRESSIBILI L'EQUAZIONE DI CONTINUITA' DEI FLUIDI PROPOSTA DA VENTUROLI E DA ALTRI AUTORI D'IDRAULICA, MA È SOLTANTO APPLICABILE AI FLUIDI INCOMPRESSIBILI.

(Questa appendice formava il tema di una seconda memoria che l'autore proponevasi di leggere alla medesima illustre Accademia che l'onorò della sua attenzione nel Luglio decorso. Ma riflettendo in primo luogo alla natura complicata dei calcoli che in essa doveva produrre, e secondariamente alla difficoltà dell'argomento che restavagli a trattare onde esaurire il tema, da quali ragioni fisiche cioè dipenda l'apparente anomalia dimostrata col calcolo, egli ha creduto miglior strada quella, di pubblicare provvisoriamente con tutta la possibile ristrettezza i soli calcoli che vittoriosamente abbattono la generalità del teorema considerato, onde poterli semplicemente citare occorrendo, nel discutere l'accennata seconda parte dell'argomento in una futura memoria.)

Assume il VENTUROLI nel Cap. I. del Libro II. della sua Idraulica, (e con esso altri autori le cui dimostrazioni nell'essenza coincidono con la sua) che una molecola fluida, sia essa appartenente ad un fluido compressibile, sia ad uno incompressibile, di forma parallelepipeda rettangolare, si muova durante il tempuscolo dt, animato dalle velocità u, v, w nel senso delle rispettive coordinate x, y, z. In un tal

moto si suppone che divenga obliquangolo il parallelepipedo, e quindi cangi di volume. Posta costante la massa del parallelepipedo primitivo, il quale detta q la densità, può rappresentarsi col prodotto $q dx dy dz$, non è possibile il supposto cangiamento di volume, se insieme non cangi la densità in ragione reciproca dei volumi; ciò ammesso, per ottenere una relazione dipendente dalla continuità del fluido, converrà cercare il nuovo volume e la nuova densità, ed eguagliare il loro prodotto alla massa data $q dx dy dz$, per soddisfare alla condizione che essa sia costante. Così otterremo l'equazione cercata, che sarà:

$$(A)\quad \left(\frac{dq}{dt}\right)+\left(\frac{dqu}{dx}\right)+\left(\frac{dqv}{dy}\right)+\left(\frac{dqs}{dz}\right)=0.$$

Nè havvi cosa più certa, più generale, o più evidente di un simil procedere, e sembrerebbe a colpo d'occhio che si dovesse tosto ottenere una condizione di continuità tanto per i fluidi aeriformi o compressibili, quanto per i liquidi o fluidi incompressibili. Il seguito insegnerà se tale aspettativa venga soddisfatta.

Prosegue il dotto Autore a trovare il nuovo volume dell'elemento considerato, mediante un calcolo geometrico ingegnosissimo, che per brevità lascio di qui esporre, potendo ognuno riscontrarlo nell'Autore, e non avendo esso veruna influenza sul nostro proposito, che i soli risultati riguarda.

La prima parte di questo calcolo dà il nuovo volume nella formula $dx\,dy\,dz\,(1+A'dt+B'dt+C'dt)$

essendo $A'=\left(\frac{du}{dx}\right), B'=\left(\frac{dv}{dy}\right), C'=\left(\frac{ds}{dz}\right)$.

Esaminando con un metodo non meno sicuro ed evidente il valore della nuova densità, questa si trova

$$=q+\left(\frac{dq}{dt}\right)dt+\left(\frac{dq}{dx}\right)udt+\left(\frac{dq}{dy}\right)vdt+\left(\frac{dq}{dz}\right)\omega dt.$$

Moltiplicato questo valore col nuovo volume, eguagliato il prodotto alla massa data $qdxdydz$, diviso per $dxdydz$, e tolto il termine q da ambi i membri, si ottiene un' equazione (secondo l'Autore) divisibile per dt, che ridotta presenta la cercata (A).

Ma qui il dotto professore per una trascuratezza in lui assai rara, omette di dire, che per ottenere una simil equazione, convien prima trascurare i termini contenenti dt^2 come infinitamente piccoli a riguardo degli altri. Questa oscurità, sia detto di fuga, fu quella, che arrestandomi nel mio progresso, m'indusse a fidarmi delle proprie forze onde terminare la dimostrazione per una via comunque diversa da quella dell'Autore, purchè seco avesse la certezza

Seguita finalmente il Venturoli al §. 100. ad osservare che „ Se il fluido è incompressibile, nel passare da un punto all'altro, non si muta nè il volume nè la densità della particola elementare. Si ponno adunque eguagliare a zero separatamente tanto la mutazione del volume, quanto quella della densità, onde l'equazione (A) si scioglie in queste due

$$(B)\qquad \left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dy}\right)+\left(\frac{d\omega}{dz}\right)=0.$$

$$(C)\qquad \left(\frac{dq}{dt}\right)+u\left(\frac{dq}{dx}\right)+v\left(\frac{dq}{dy}\right)+\omega\left(\frac{dq}{dz}\right)=0.$$

Or ciò che io tendo a provare, si è che queste due equazioni, che l'autore giustamente considera come determinanti la condizione dell'incompressibilità, sono implicitamente contemplate nell'equazione da cui deriva la cercata (A) ed in essa contenute.

Chè se arrivato sarò a validamente provar questo fatto, sarò giunto a dimostrare che ai soli liquidi, e

non insieme ai fluidi aeriformi, è applicabile la formula trovata per la continuità della massa fluida; che l'ipotesi della continuità nei fluidi aeriformi è assurda, perchè sfuggita ad un calcolo sì generale qual'è l'esposto, e che finalmente nei fluidi aeriformi altre leggi ed altri elementi debbonsi contemplare, che quelli rinvenibili nei liquidi. Mi accingo alla dimostrazione.

Nel corso dei calcoli precedenti erano state stabilite le tre equazioni seguenti:

$$(1.)\quad A=\left(\frac{du}{dx}\right);\; B'=\left(\frac{dv}{dy}\right);\; C''=\left(\frac{dw}{dz}\right);$$

come ho già esposto.

Il prodotto della moltiplica dei due valori del nuovo volume e della nuova densità, eguagliato a $q dx dy dz$, divisa l'equazione per $dx dy dz$, indi tolto q da ambi i membri, e diviso per dt, conforme vuole l'autore, dà per risultato l'equazione:

$$(2)\; o=\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{dq}{dt}\right)+\left(\frac{dq}{dx}\right)u+\left(\frac{dq}{dy}\right)v+\left(\frac{dq}{dz}\right)w+qA\\ +qB'+qC''+\left(\frac{dq}{dt}\right)Adt+\left(\frac{dq}{dx}\right)Audt\\ +\left(\frac{dq}{dy}\right)Avdt+\left(\frac{dq}{dz}\right)Awdt+\left(\frac{dq}{dt}\right)B'dt\\ +\left(\frac{dq}{dx}\right)B'udt+\left(\frac{dq}{dy}\right)B'vdt+\left(\frac{dq}{dz}\right)B'wdt\\ +\left(\frac{dq}{dt}\right)C''dt+\left(\frac{dq}{dx}\right)C''udt+\left(\frac{dq}{dy}\right)C''vdt\\ +\left(\frac{dq}{dz}\right)C''wdt.\end{array}\right.$$

È chiaro che non volendo trascurare i termini con dt, (lo che però legittimamente non nego potersi

fare) l' equazione richiesta non resulta per se. Una certa renitenza che sento a disprezzare dei termini anche infinitesimi ogni qual volta posso evitarlo, fa sì, che non avendone contratto l' abitudine, di rado mi si presenta un tale artifizio alla mente. Ciò mi successe nel presente caso, e m'indusse a preferire il seguente metodo di Francoeur per ottenere il domandato.

L'ipotesi fondamentale dell' Autore si è, che la somma $q dx dy dz = \text{cost.}$ (3.) alla qual' equazione applicati i logaritmi avrò: $lq + l(dx dy dz) = \text{cost.}$, e differenziando: $\frac{dq}{q} + \frac{d(dx dy dz)}{dx dy dz} = 0$. (4). Ora ritornando al nuovo volume trovato, si trova esser cresciuto il volume primitivo della quantità.

$dx dy dz\, (A dt + B' dt + C'' dt)$; dunque:

$$d(dx dy dz) = dx dy dz\, (A + B' + C'') dt. \quad (5.)$$

Sostituendo la (5.) nella (4) avremo:

$$\frac{dq}{q} + (A + B' + C'') dt = 0, \text{ ossia}$$

$$\frac{dq}{dt} + q(A + B' + C'') = 0 \quad (6.)$$

Per trovare $\frac{dq}{dt}$, si rifletta che essendo per ipotesi q funzione di t, x, y, z, avremo:

$$dq = \left(\frac{dq}{dt}\right) dt + \left(\frac{dq}{dx}\right) dx + \left(\frac{dq}{dy}\right) dy + \left(\frac{dq}{dz}\right) dz$$

E dividendo per dt, sarà

$$\frac{dq}{dt} = \left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{dq}{dx}\right)\frac{dx}{dt} + \left(\frac{dq}{dy}\right)\frac{dy}{dt} + \left(\frac{dq}{dz}\right)\frac{dz}{dt}.$$

Sostituendo per $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ i loro valori u, v, w (vedi *Ventur. Meccan.* §. 231. *sqq.*)

avremo: $\frac{dq}{dt} = \left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{dq}{dx}\right)u + \left(\frac{dq}{dy}\right)v + \left(\frac{dq}{dz}\right)\omega$

Sostituito questo valore nell'equazione (6.) viene:

$$(7.)\quad \left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{dq}{dx}\right)u + \left(\frac{dq}{dy}\right)v + \left(\frac{dq}{dz}\right)\omega + qA + qB' + qC'' = 0.$$

cioè i primi sette termini dell'equazione (2.) sono nulli, quindi i rimanenti suoi termini dovranno esser nulli indipendentemente da quelli. Di ciò terremo conto in appresso.

Ora l'equazione (7) trovata dà l'equazione cercata senz'altro calcolo, poichè sostituiti per A, B', C'' i loro valori esposti (1.) si ottengono i termini:

$$\left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{dq}{dx}\right)u + \left(\frac{dq}{dy}\right)v + \left(\frac{dq}{dz}\right)\omega + q\left(\frac{du}{dx}\right)$$

$$+ q\left(\frac{dv}{dy}\right) + q\left(\frac{d\omega}{dz}\right) = 0\text{, che ridotti danno l'eq } (A)$$

$$\text{cioè}\quad \left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{d\,qu}{dx}\right) + \left(\frac{d\,qv}{dy}\right) + \left(\frac{d.q\omega}{dz}\right) = 0.$$

Dunque l'equazione da me prescelta (4) risolve il problema anche senza proseguire nel calcolo. E fin qui nulla si sarebbe ottenuto, se il paragone dei due metodi non rendesse patente l'errore commesso nel seguente modo.

Mediante l'equazione (7) ho dimostrati nulli i primi sette termini dell'equazione (2) dunque sono nulli anche i rimanenti termini e perciò.

$$(8)\quad 0 = A dt \left\{ \left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{dq}{dx}\right)u + \left(\frac{dq}{dy}\right)v + \left(\frac{dq}{dz}\right)\omega \right\}$$
$$+ B' dt \left\{ \left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{dq}{dx}\right)u + \left(\frac{dq}{dy}\right)v + \left(\frac{dq}{dz}\right)\omega \right\}$$
$$+ C'' dt \left\{ \left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{dq}{dx}\right)u + \left(\frac{dq}{dy}\right)v + \left(\frac{dq}{dz}\right)\omega \right\}$$

ossia riducendo

$$(9)\quad 0 = (A + B' + C'') \times$$
$$\left\{ \left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{dq}{dx}\right)u + \left(\frac{dq}{dy}\right)v + \left(\frac{dq}{dz}\right)\omega \right\}$$

Di questi due fattori uno almeno è certamente nullo; or qualunque dei due si voglia supporre tale, l'equazione (7) darà nullo anche l'altro; onde viene che nell'equazione (2) sono effettivamente contenute, come volevo dimostrare, le tre equazioni (A), (B) e (C) fra loro necessariamente collegate, e supponendone insussistente una, non ne sussisterebbe alcuna.

Anzi una conseguenza più importante ancora vuolsi rilevare, che cioè l'equazione (A) richiede oltra l'incompressibilità del fluido ancora la sua omogeneità, poichè l'equazione (C) determina $dq = 0$, mentre l'equazione (B) applicata all'equazione (5) dà $d(dxdydz) = 0$, rendendo così inutile ancora il paragrafo susseguente 101. del nostro Autore.

E qui colgo l'occasione di rimarcare quali rischj si corrono, allorquando con troppa facilità si prendono a trascurare dei termini infinitesimi senza aver prima esaminato se essi possano in se contenere qualche recondita proprietà, o tale da modificare l'estensione della verità che si cerca di stabilire, come in questo caso e successo. Fù trasportato l'Autore dalla facilità con la quale arrivava al suo intento troncando due terzi dei termini che costituivano il resultato ottenuto, senza temere, che in tanti termini potesse esse-

tenersi cosa di qualche importanza; ed appunto quei termini, benchè infinitesimi di second'ordine, ascondevano la più importante condizione del teorema. La libertà di trascurare gli infinitesimi è un' arme preziosa ed utile nelle mani del Matematico, ma pur anche pericolosa, e maneggiarsi dovrebbe come dai medici un potente veleno, in parca dose e nei casi estremi.

Del resto anche con l'equazione dell' Autore trascurando i detti infinitesimi si arriva al medesimo risultato, avendo l'avvertenza di fare una nuova equazione eguagliando a zero i termini trascurati, ed esaminandola come sopra; ma ho preferito di operare con l'addotta equazione (4.) come più rigorosa, e porgendo il vantaggio, di far vedere a colpo d'occhio essere l'incompressibilità e l'omogeneità una conseguenza necessaria dell'ipotesi della massa costante.

Potrebbe a taluno sembrare in me un'ardire soverchio quello di combattere un sì raro ingegno qual'è il Venturoli. Ma mi protesto in primo luogo di essere uno dei più esaltati ammiratori di quell' insigne Autore, ed in secondo luogo di aver eletto la sua opera per condurre i calcoli che sopra, unicamente perchè essendo un' autore Italiano, esso è più alla mano di tutti; giacchè è indifferente per la sussistenza del mio argomento, qual Autore sia prescelto, essendo tutti caduti egualmente nel medesimo equivoco, comunque possano aver mutato l'effigie superficiale della dimostrazione.

OSSERVAZIONI

SULL' EQUAZIONE DELLA STREFOIDE CHE INCONTRASI NELLE OPERE DEL RICCATI E DELL' AGNESI

In conferma della novità della Strefoide del Dott. Montucci.

(Dopo letta la Memoria sulla Strefoide, l' I. e R. Accademia Fisiocritica nominò due suoi Membri a renderne il debito conto, e nella Seduta del dì 21 Settembre p. p. furono infatti pubblicamente letti i due rapporti dei Virtuosissimi Accademici a ciò incaricati, uno dei quali rapporti pone in dubbio la novità della curva in conseguenza di due passi più sotto citati, mentre l' altro sostiene l' originalità del lavoro e insieme dell' invenzione, nonostante i medesimi passi. Non essendo però costume della prelodata illustre Accademia il pubblicare siffatti Rapporti con la stampa, si crede in dovere l' Autore di rilevare da se stesso i passi che hanno cagionato questa differenza di opinione, e discutere se sieno o nò di peso sufficiente per togliere alla sua fatica il pregio dell' originalità o altro merito che per avventura aver potesse.)

Nostra loquar; nulli vatum debebimus orsa,
Nec furtum, sed opus veniet.
M. Manilii Astronomicon L. II. v. 57.

La possibilità di vedersi dopo un lungo e faticoso studio per un accidente puramente fortuito ed affatto sconosciuto, contrastare il merito di una invenzione, desta nuove forze scientifiche per opporle a chi pur tentasse di sminuire il merito del proprio lavoro. Questo appunto è il caso in cui al presente

mi trovo, e dal quale emerge in me la necessità di tediare il lettore con alcune parole in difesa della mia invenzione, a cui potrebbe contrastarsi il merito della novità con la superficiale lettura delle poche parole nelle Istituzioni Analitiche del Riccati e dell' Agnesi contenute, e citate in uno dei Rapporti sul mio lavoro presentati alla insigne Accademia Scientifica di questa Città.

Dopo aver inutilmente esaminata tutta la serie delle Memorie dell' *Academie des Sciences de Paris* dal 1666 fino al 1790; *l' Institut National, Classe des Sciences Physiques et Mathématiques* dall' Anno IV. fino al 1815; le *Acta Eruditorum* di Lipsia dal 1682 fino al 1700; le *Miscellanea Berolinensia* dal 1710 fino al 1744; il *Bulletin des Sciences Mathematiques etc de Paris* dal 1829 fino al 1831; le liste della *British Association* fino ai giorni nostri, e finalmente gran numero d' Autori, tra i quali figurano *Eulero, Bernoulli, L'Hôpital, Wolfio* ec. onde vedere se a caso s' incontrasse la Strefoide tra le moltiplici curve di cui in queste opere si tratta, trovo finalmente uno dei passi nel prelodato Rapporto citati, sopra la Curva dell'equazione $y^2 = \frac{x(a-x)^2}{2a-x}$ nelle *Institutiones Analiticae a Vincentio Riccati et Hieron. Saladini collectae*, tom. I. lib. I. cap. VII. *De Curvis excedentibus gradum secundum, quae per instrumenta delineantur*, Probl. IX.

In questo passo si occupa il Riccati del luogo geometrico di tutti i punti *M* (*Fig* 3) tali che una perpendicolare alzata sul raggio vettore nel punto *M* fino al suo incontro con l'asse, sia sempre uguale a quella parte dell' asse compresa tra la sua estremità ed il centro *C*. Questo luogo geometrico corrisponde precisamente con la Strefoide, trovandosi per

l'appunto l' equazione $y^2 = \frac{x(a-x)^2}{2a-x}$. Anche nelle *Istituzioni Analitiche di D. Maria Gaetana Agnesi, Milano* 1748. *T. I. pag.* 379. trovasi, come esattamente nel suddetto Rapporto si accenna, la medesima equazione dedotta dalla proprietà che $MZ = ZC = Zm$, ottenuta dunque per istrada affatto diversa da quella del Riccati.

Onde io non abbia presso chi imponderatamente potesse gettar l'occhio su questa casualità, la taccia detestabile di plagiario, e per convincere nell'istesso tempo il Pubblico, che nonostante questa sfavorevole circostanza, a me si deve l'invenzione della Strefoide, mi affretto a spassionatamente esaminare la natura ed il contenuto dei luoghi citati, ed a discutere, se essi possano o nò nuocere alla originalità del mio lavoro.

In primo luogo dovrà ogni Matematico meco convenire, non risedere l'importanza di una curva nella sua equazione, potendosene incontrare delle bellissime appartenenti a delle curve scevre affatto di rimarchevoli proprietà. Tale è la Cissoide, che nonostante la sua elegante equazione $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$ è una curva estremamente povera, nè fregiata di alcuna interessante prerogativa. Ne viene che *inventare una curva* non significa il trovarne soltanto l'andamento e l'equazione, ma bensì l'investigarne le geometriche proprietà, il combinarle ingegnosamente, e dedurne dei teoremi interessanti. *Hoc opus, hic labor est.* Or questo nè l'Agnesi, nè il Riccati hanno fatto; lungi dal pretendere d'investigarla, essi non mostrano di aver avuto anche il minimo sospetto che in essa potessero celarsi delle esimie novità; l'adduce il Riccati come un' esempio del moto continuo, senza occu-

parsene che per una ventina di versi, che nulla contengono, fuorchè le osservazioni solite farsi a qualunque curva, e press'a poco contenute nel mio § 6; nè havvi la minima delle indagini che io ne ho istituite. L'Agnesi ne fa parola parlando dei luoghi geometrici, e ne dice anche meno del Riccati, ristringendosi anch'essa alle sole osservazioni del mio § 6. Non posson dunque questi dirsi inventori della curva controversa per averne soltanto per mera sorte data l'equazione, giacchè al loro proposito sarebbe servita qualunque siasi altra linea del terzo o quarto grado, che nel caso del Riccati suscettibile fosse stata del moto continuo. Nè quindi esatta sembrami l'asserzione del dotto opinante, che sieno nei detti passi *dimostrate alcune proprietà le quali ottenute in questa curva, hanno servito di principal fondamento a facilmente rinvenire le altre proprietà sue ec.* poichè non avendovi io ravvisate che quelle osservazioni che nel § 6 della mia memoria ho comprese, queste, io sostengo, non sono punto sufficienti, nè danno la minima facilitazione a rinvenire quelle proprietà che dall' esame delle *ordinate convette* e dall'applicazione del circolo circoscritto con calcolo e metodi del tutto originali ho dedotte, e che più opportunamente qui sotto particolarmente accenno, come formanti quasi l'intero contenuto della mia dissertazione.

In secondo luogo mi salva da ogni anche minimo sospetto di plagio la notabile circostanza, che ambi i citati Autori da principj affatto dal mio diversi deducono la costruzione della Strefoide. Poichè lungi dal fare all'esempio mio $\overline{CZ}^2 = MZ \times Zm$, ed $MZ : Zm :: a : b$, condizioni fondamentali, costruisce il Riccati, come dissi, la perpendicolare alzata sul punto M del raggio vettore eguale alla parte dell'asse intercetta tra l'estremità di detta perpendicolare ed

il centro della curva, principio che io, lungi dall'averlo furato, non ho neppur citato come teorema, e che vedo dar luogo ad altre belle combinazioni, che rendono la Strefoide viepiù preziosa alla Scienza. L'Agnesi, come ho detto, si contenta di fare $MZ=CZ=Zm$, caso puramente particolare. E viceversa, tacciono ambedue di ogni qualunque proprietà che io ho adoperato per condurre alla costruzione della curva, onde esiste una enorme distanza dal mio lavoro a quelle poche parole che essi ne hanno scritte. Non hanno dunque servito, come suppone il chiarissimo oppinente, i passi citati *a facilmente rinvenire le altre proprietà*, poichè lungi dal partir mi da quei dati, i un di essi non viene neppure da me accennato, mentre l'altro io legittimamente deduco da calcoli precedenti, indipendenti ed originali, senza formarne base all'invenzione della curva.

Ma, ripeto, non è l'invenzione dell'*equazione* che io mi curi di attribuire a me medesimo, quantunque con tutta giustizia io possa anche a quella asserire il mio diritto, non essendo che per semplice caso in questi due autori ripetuta quella soltanto che alla Strefoide *retta equilatera* compete. Quei punti bensì su i quali con ragione, a mio parere, io fondo l'importanza dell'invenzione, e che niuno mi può contrastare, come quelli ove anche più indubitatamente si scorge il getto dell'originalità, sono

1. L'uso e l'esame delle *coordinate convette* con le funzioni della curva da esse dipendenti (§. §. 9. 13. 25. 26. 27. 35.)

2. L'applicazione del *circolo circoscritto* all'esame della curva (§. §. 30. *sqq.*)

3. L'invenzione del modo di condurgli la tangente arrivando ad una espressione semplicissima (considerato il grado della curva) attraverso un calcolo trigonometrico complicatissimo (§. 42.)

4. E finalmente l'aver stabilito le due remotissime ed insieme generalissime condizioni addotte nel § 2. e segnate (α), (β), condizioni che fanno sì, che non di una curva sola, ma di una intera e nuova *famiglia* di curve io mi sono occupato.

Chi mai potrà dunque giustamente asserire, che tali punti nati sieno dalle osservazioni del § 6. e dove sono mai nei citati autori *dimostrate quelle proprietà che hanno servito a facilmente rinvenire le altre?*

Comunque sia, non consiste per le addotte ragioni l'interessante di questa linea nella sua algebrica equazione, ma bensì nella folla di proprietà che ad ogni passo vi s'incontrano, e che *nella parte speculativa* la elevano molto al di sopra dell'Iperbola, dando luogo così a porre in grave dubbio il passo del prelodato Rapporto, in cui gratuitamente si asserisce essere state simili proprietà *in numero molto maggiore con ogni sforzo d'arte investigate e fissate in altre curve ec.* Nè consiste l'originalità dell'invenzione nella sola *descrizione* della curva, ma nel metodo con cui l'ho trattata, metodo a cui, se altra lode non può esigere, deve per ogni rapporto concedersi il merito della novità.

Che se creduto avessi potermi mieter gloria col solo immaginare delle generazioni di curve, facilmente avrei potuto soddisfare a questo meschino desiderio, essendomisi, prima di aver la sorte d'incontrar la Strefoide, affacciato un numero ragguardevole di curve, per la maggior parte non anche da altri ideate. Ne citerò alcune che ad un' occhio superficiale assai interessanti sembrar potrebbero, ma che per adesso almeno, nulla offrono di rimarchevole a chi con fondamento le esamina.

Sull'asse AB = a, *come diametro, descritto un circolo, cui sia nel punto* A *condotta la tangente*

normale all'asse, e dall'altra estremità B del diametro condotte delle rette che seghino il circolo e la sua tangente, il primo in dei punti m, *la seconda in dei punti* Q, *e sul prolungamento di dette secanti al di là della tangente prese delle porzioni* QM = Qm, *trovare il luogo della curva che passa per i punti* M.

Fatto nella direzione dell'asse $AP = x$, $PM = y$, si trova $y^2 = \frac{x(a+x)^2}{a-x}$.

Potendosi a piacimento variare la curva generatrice sostituendo al circolo la parabola, l'ellisse ec, si vede trattarsi quì di una nuova *famiglia* di curve, che hanno la forma di un *giogo*, con un' asintoto, che nel nostro caso trovasi al punto ove $x = a$.

Trovare la curva di asse 2a *tale che ogni sua ordinata* y *calcolata dal centro sia quarta proporzionale dopo l'ordinata del circolo circoscritto, l'ascissa dall'origine, ed il semiasse* a.

Si trova l'equazione al centro $y^2 = \frac{a^2(a-x)}{a+x}$.

Alzata la AB=a *perpendicolare all'asse* AP, *e col diametro* AB *descritto un circolo, condotte poi delle rette* BP *del punto* B *fino all'incontro dell'asse in* P, *in modo che il circolo le seghi in dei punti* m, *si domanda qual curva passi per i punti* M *delle ordinate* PM = Pm *ortogonali all'asse* AP?

Fatta $AP = x$, trovasi $y^2 = \frac{x^4}{a^2+x^2}$

Da ciascun raggio a *di un semicircolo tolta, a principiar dalla periferia, una porzione eguale all'arco corrispondente, trovare la curva che ne resulta.* Avremo, detto u l'arco, l'equazione trascendente $y = (a - u)$ fnu.

Che se detta porzione si togliesse incominciando dal centro, si avrebbe l' equazione anch' essa trascendente $y = u \, \mathrm{fin} \, u$

Or queste sono tutte curve originali da me ritrovate, e che non ho potuto altrove nonostante ogni mio sforzo, incontrare; lo che però non impedisce che qualche codice a me ignoto e sepolto nella polvere possa averne parlato, come della Strefoide è accaduto. Di queste intanto ho trovato la generazione e l'equazione, e sono tutte suscettibili di quel genere di esame che nei §§. 4. 6. ho fatto della Strefoide. Ognuno può convincersi frattanto che io non destinai alla pubblicazione le curve che sopra, quantunque mie, ma prescelsi la Strefoide, perche mentre era ricchissima questa, erano sterilissime quelle. Ma se or che le ho pubblicate, un altro individuo esaminandole ritrovasse in una di esse delle prerogative geometriche tali da renderla pregevole, con qual dritto oserei io contrastargli l'invenzione, se ciò che sterile ed inerte nelle mie mani era rimasto, nelle sue si fosse reso fecondo? E per l' istesso argomento dunque dirò MIA la Strefoide, perche da me felicemente investigata e da nuove ipotesi dedotta, ancorchè mille altri oltre il Riccati e l'Agnesi ne avessero data la generazione

Non ista infatti la difficoltà nell' inventare l'equazione di una curva, ma bensì nel ritrovare una curva tale, che meriti ammirazione per le sue geometriche prerogative. Ne tra queste io conto il ritrovarne la tangente, suttangente, ed altre funzioni, le cui espressioni sono già date in generale dal calcolo differenziale, neppure io vi conto la rettificazione, quadratura, o cubatura, per eseguire le quali basta saper calcolare, senza adoperare il minimo ingegno o occhio geometrico, conto bensì fra di esse le già citate proprietà *particolari*, ed il metodo usato per trovarle e trarne partito.

Ma quando dunque vero sia, che le proprietà dal Riccati e dall' Agnesi citate abbiano *servito a facilmente rinvenire le altre proprietà*, dovranno in *tutte le curve* portare un' analogo effetto le osservazioni simili a quelle contenute nel §. 6. che formano precisamente il sunto degli articoli dei mentovati Autori. Avendo io dunque dato luogo a tali osservazioni col citare l'equazioni delle curve sopra descritte, per essere dette curve, come tutte le altre, suscettibili di analoghe chiose, inviterò chiunque credesse tanto facile il dedurne altre virtù loro proprie, a dimostrarne l'agevolezza col fatto, ponendosi alla loro ricerca. *Hic Rhodus est, hic salta.* I *consueti analitici metodi* che tanto mi hanno, come si suppone, assistito nell' esame della Strefoide, non dovrebbero mancare di portare in tutti gli altri casi un consimile effetto, quando vero sia, essere il solo fatto, che $x=a$ dia $y=0$, stato capace ad illuminarmi sulla strana proprietà rimotissima, che trovasi al §. 35. esposta!!!

Col citare dunque le curve che sopra, io spero di aver convinto i lettori, che non senza un'indefesso studio mio proprio, nè senza lunghi e faticosi tentativi io giunto sono a discoprire la Strefoide; e l' indole del mio lavoro paragonata con quella dei pochi versi del Riccati in principio citati, sarà prova sufficiente, che lungi dall' aver impudentemente avuto ricorso al plagio, è originale mia per il modo con cui vi arrivo, perfino quella equazione che per un caso meramente fortuito trovasi presso un' altro autore ripetuta; essendo il vero tipo dell' invenzione non *l' equazione della Strefoide equilatera*, ma le due condizioni generalissime al §. 1. della mia memoria stabilite, che producono la (δ), equazione generale a tutte le Strefoidi. Ed invano ho cercato nella Gazzetta Toscana N.° 96. a. c. del Rapporto citata, un passo in cui si richiamasse l' attenzione del Pubblico alla Strefoide

singolarmente poi nel caso d' essere equilatera. Poichè la citata Gazzetta null'altro contiene che un generico annunzio della Strefoide, senza specificarla nè come equilatera, nè coma scalena, nè altra vi si promette fuorchè ciò che io saprò mantenere col fatto, le sue applicazioni cioè al disegno architettonico.

Come sarebbe egli mai possibile che nell' ammasso di Volumi teste citati, non s'incontrasse neppur un'accenno di simil curva, se da qualcuno fossam state ritrovate le proprietà da me scoperte nei §. § 13. 17. 19. 20. 23. 25. 26. 27. 28. 32 32 *a. c. d.* 34. 35. 38, 6ª. e 4ª. *sqq*, una sola delle quali sarebbe stata più che aufficiente a risvegliare l'attenzione dei Geometri onde esaminare questa linea? E se taluno discoperte le avesse, avrebbe egli mancato d' inviare il suo lavoro all'Accademia di Parigi, la più rinnomata senza eccezione che vi sia stata e che vi sia? Ed avendo ciò fatto, l'Accademia avrebbe ella trascurato d' inserirla nelle sue Memorie, ove tante cose di assai minore entità s' incontrano? Nò, perche allora necessario sarebbe supporre nell'uno la più sciocca trascuratezza, e nell'altra il più irragionevole disprezzo.

Che quand'anche vero fosse l' inammissibile asserto del rapporto, *che gli Analisti in conto alcuno non sonosi curati di cercarle in questa, sabbene già di esse ne avessero scoperte le tracce*, io sosterrei che gli analisti così facendo avrebbero posto in non cale l' interesse della lor scienza; giacchè se sterile nelle applicazioni oggi sembra (perchè non a fondo investigata) la Strefoide, egualmente sterili erano nel loro principio e la Parabola, e l'Ellisse, e la Cicloide, e la logaritmica, mentre sterili tuttora son rimaste in simili applicazioni a dispetto d' ogni studio e l'Iperbola, e le spirali, e la Cissoide, e la Concoide, quali ultime curve altro pregio non hanno che quel-

lo di vedersi coi nomi greci d'Archimede, Diocle, e Nicomede fregiati, e trovansi nonostante in ogni elementare libercolo senza plausibil ragione introdotte.

Onde dare intanto ad ognuno una prova che io *non vendo nugas*, nelle annate 1729, 1730 e 1731 dell'Accademia di Parigi vi sono tre lunghi trattati, il primo sulle linea di terz' ordine, e gli altri due sulle linee di quart'ordine, nè in alcuni si trova una parola della Strefoide tanto scalena che equilatera. Si parla negli altri tomi poi di molte altre curve, tutte però di gran lunga inferiori alla Strefoide nelle rispettive loro proprietà ristrettissime e di tenuissimo valore geometrico.

A difendermi completamente poi dall'accusa del plagio serve il fatto, che per compilare il mio lavoro mi è stato indispensabile non solo l'immaginare dei termini nuovi e non usitati per assistermi negli enunciati, ma infino il ritrovare due lemmi di geometria elementare, quelli cioè dei §§ 3. 24. Dopo la mala sorte che ho avuto d'incontrare l'equazione della Strefoide inaspettatamente in altri autori, non oso più asserire esser questi lemmi di mia invenzione, giacchè in qualche recondito scartafaccio potrebbe il caso nuovamente farmeli comparire davanti. Egli è ben vero però che ho cercato invano negli antichi e moderni geometri una cosa che gli si assomigliasse, e finchè non mi vengino in altri indicati, io mi azzarderò a chiamarli miei. Certo si è, che io da me appositamente li composi pel bisogno che ne avevo nel trattar la Strefoide, lo che potrà a colpo d'occhio conoscere ognuno che spassionatamente esamini il mio lavoro. E prova sufficiente dell'originalità dell'opera mi sembra questa, poichè senza di essi dimostrar non si possono le non poche proprietà della curva, che ne dipendono; così per esem. dal lemma del § 24 scaturiscono i teoremi dei numeri 25 26 35.

e 38, 60. e senza di esso, sarebbero tutti insussistenti.

Chè se realmente questi lemmi altrove esistessero, e fossero stati come la Stieloide dai Geometri obliati, *nè gli Analisti in conto alcuno curati si fossero* di mantenerne la memoria, dirò esser maggior vergogna dei Matematici l'aver simili cose trascurate, che vergogna mia di averle con le sole proprie forze risuscitate. E maggiormente mi confermerei in ciò che con troppo ardire nel mio esordio asserivo, che nelle Matematiche sarebbe esaurita ogni fonte di ricerca.

E quì potentemente viene a presentarsi una riflessione alla mente. Se io, posto che noti mi fossero stati gli obbiettati passi, avessi invece di chiamar *mia* la curva, citati gli autori in cui comparisce, dicendo semplicemente essermi questa sembrata degna di ulteriore studio e sviluppo, su cosa sarebbesi poggiata allora la opposizione del dotto avversario? Avrebbe forse trovati falsi i teoremi stabiliti? oppure questi avrebbero perso della loro forza e della loro verità? Sarebbe comparsa forse minore la mia fatica, meno apprezzabili le proprietà della curva medesima? Dunque qual materiale differenza ci corre mai tra il caso successo, e quello per ipotesi supposto? Quella sola, che non di una *invenzione*, ma di un analitico lavoro si sarebbe parlato, e potremmo con Seneca dire: *Non est* MINOR, *sed minus* FULGET.

Mentre intanto convengo con quella parte del rapporto del chiarissimo opponente che accenna, non aver questa curva applicazione veruna alle Scienze sorelle, lo che da me stesso io primo nella mia memoria pag. 27. ho dichiarato, confermerò nonostante la mia opinione nell'istesso luogo emessa, che se ancora di tali applicazioni è priva, non si può però asserire che priva ne debba restare, giacchè per questa parte ancora non è stata a verun tentativo sottomessa.

Doppiamente perciò azzardata sembrami l'asserzione del controverso rapporto, che cioe gli *Analisti in conto alcuno non sonosi curati di cercare* in questa curva le proprietà che vi ho trovate io, *sebben già di esse ne avessero scoperte le tracce*. Se, come insegna il rapporto, furono esaminate le Sezioni Coniche *per le utili applicazioni* che gli analisti *patentemente hanno conosciuto potersene fare* alle Scienze fisiche ec. bisognerà convenire, che Apollonio Pergeo, e chi avanti di lui, come Aristeo, esaminassero la parabola con l'unico oggetto di esser utili agli Artiglieri d'oggi giorno, e l'ellisse col fermo proposito di cordialmente assistere Newton nella sua spiegazione del sistema planetario. Similmente sarebbesi tosto immaginata la cicloide per la profetica speranza di ottenere una curva dotata di iso-e brachisto-cronismo, e la Concoide per dar l'entasi alle colonne. Chi poi non volesse di tal ragionamento convenire, dovrà per mala forza concedermi, che gli Analisti esaminarono le Sezioni Coniche con l'istessa cecità e buona fede, con la quale io ho voluto togliere dall'oscurità la Strefoide; che dunque, come è naturale, non è stata la parabola scoperta in conseguenza delle sue proprietà, ma scoperte le proprietà in conseguenza della Parabola.

Or perchè non si sarebbero *gli Analisti curati* di cercare le proprietà della Strefoide? — Perchè soltanto utile alle Matematiche pure. — Dunque di niuna parte dovremo curarci delle Matematiche pure, fuorchè di quelle che alla Fisica o alla Meccanica possonsi applicare? Ebbene dunque; si faccia delle Matematiche pure dietro siffatto principio lo spoglio. Dovremo allora bandire la polisezione dell'arco, la moltiplicazione del cubo, il bel teorema di *Gauss* sulla divisione del circolo in $2^n + 1$ parti, l'intera teoria algebrica dei problemi indeterminati oltre il primo grado, e tre quarti circa del calcolo infinitesimale,

senza contare una folla di teoremi spicciolati, ove si conosce una somma maestrìa d'invenzione, quantunque nulla vi sia per anco d'interessante per le amiche Scienze. Ma in questa proscrizione distruttrice converrà giustamente allora comprendere come capoliste le tanto vantate e tanto insipide curve, in cui oggi universalmente si ammaestrano i giovani che dedicansi alla Matematica, e sono: la Concoide, la Cissoide, la quadratrice, le spirali, le parabole e le iperbole dei gradi superiori. Pure di queste *gli analisti sonosi curati*; ne so comprendere qual mai vantaggio avessero sopra la Strefoide, di cui quantunque *scoperte* delle moltiplici sue prerogative *le tracce*, niuno sembra che si sia voluto curare?

Mi si opporrà l'utilità della Concoide per entasiare le colonne? Risponderò che le più belle moderne ed antiche colonne sono senza entasi costruite, e che i migliori architetti hanno condannato le colonne entasiate. — Mi si addurrà la Cissoide come atta a trovare due medie proporzionali? Risponderò, essere la Strefoide attissima a bisecare gli angoli, giacche per l'art. 26 l'angolo *AmC* e sempre la metà dell'angolo *Amp.* (Fig. 3.) e indi sosterò, che come io per bisecare gli angoli non ho giammai adoperato la Strefoide, ma bensi le seste, così nessun Geometra vivente probabilmente avrà mai descritto una Cissoide per ottenere due medie proporzionali. Credo perciò di poter giustamente asserire che la Strefoide meritava le indagini degli Analisti al pari di qualunque altra curva, e che se volontaria fosse stata (cosa impossibile) la trascuratezza degli Analisti, altrettanto sarebbe dovuta sembrare capricciosa ed inconcludente. Ed appunto poiche volontaria non può essere stata una tal trascuranza, ma cagionata soltanto dal non avere della nostra curva sospettate le proprietà, io con ragione asserisco il mio diritto di chiamare esclusivamen-

te MIA la Strefoide tanto scalena che equilatera. Chi avendo a caso ritrovato dell'oro, credendolo ottone lo rigetta, non può pretendere a quell'oro verun diritto, allorchè altri di lui più avveduto, in vago ornamento lo ha saputo trasformare.

Ma il vero vantaggio della Strefoide sopra le predette curva quello si è che nella pag 4 ho accennato, di esser ella cioè di tante belle proprietà dotata da poter servire di *scuola elementare* al principiante, a così di poter riempire una grave laguna che nei metodi d'insegnamento Matematico si scorge, a che penosamente io medesimo provavo, allorchè lungi dal voler spingere l'ardito passo sulla scientifica palestra, io unicamente mi studiavo di porre una ferma e solida base elementare, onde con maggior sicurezza potermi nelle a me allora incognite regioni della Scienza inoltrare. E dalla propria esperienza convinto, asserisco non esservi per il principiante passo più scabro di quello, che dalle ricche Sezioni Coniche allo communemente addotte sterili a misera curve dei gradi superiori lo trasporta. Mancagli infatti l'esempio di una curva di grado superiore, che possa con delle numerose proprietà avvisarlo dell'indole generale di queste, a dell'indole diversa delle curve di grado secondo; ne, privo di un simil contrapposto, può per lungo tempo lo studente arrivare a intimamente comprendere l'importante teoria delle Coniche Sezioni. La Strefoide appunto tal contrapposto gli offre; e le numerose sue speculative virtù mentre risvegliano in lui la curiosità, madre di ogni progresso, gli servon alla più astruse teorie di facil tragitto.

Tale è infatti la ricchezza di combinazioni di cui gode la Strefoide, che giornalmente se ne travedono delle nuove. Così i §. §. 32. *a. b. c d. e.* furon da me posteriormente alla lettura della memoria originale trovati e composti; il teorama da cui il Riccati

deduce la costruzione della curva, che mi era totalmente sfuggito, oltre all' esser per se stesso interessante, dà luogo a nuove bellissime combinazioni che spontaneamente saltano agli occhi; e finalmente pochi giorni sono, mi avvidi di un'altra interessantissima speculativa proprietà della Strofoide, che cioe: *l ascissa dal centro* CP *è media proporzionale tra le due ordinate convette*

Dimostrazione. Abbiamo (10) l'ordinata convetta interna dal centro $y = x \sqrt{\left(\frac{a-x}{a+x}\right)}$; quella esterna $y' = x \sqrt{\left(\frac{a+x}{a-x}\right)}$; onde $yy' = x^2 = \overline{CP}^2$, il che ec.

E quante mai altre proprietà possono essere tuttora ascose in una curva di tanta fecondità dotata? E si dovrebbe con un sì felice principio del seguito dubitare? E di questo teorema, come degli altri, si dirà esser egli nato dalla considerazione che $x = a$ dia $y = 0$? *Credat Judaeus Apella!*

Qui intanto non male a proposito potrei per intero trascrivere l'elegante e ragionata prefazione che fa introduzione al tomo dell'anno 1699. dell' *Academie des Sciences de Paris*; ma mi contenterò di riportarne il seguente squarcio:

De plus, telle speculation géomètrique, qui ne s' appliquoit d'abord à rien d' utile, vient à s' y appliquer dans la suite. Quand les plus grands Geometres du dix-septième siecle se mirent à etudier une nouvelle courbe qu'ils appellèrent la Cycloide, ce ne fut qu' une pure speculation où ils s' engagèrent par la seule vanité de decouvrir à l' envi les uns des autres des théorèmes difficiles. Ils ne prétendoient pas eux memes travailler pour le bien public; cependant il s'est trouvé, en approfondissant la na-

ture de la Cycloïde, qu'elle étoit destinée à donner aux pendules toute la perfection possible, et à porter la mesure du temps jusqu'à la dernière précision.

E mi cade in acconcio eziandio il citare un passo del Sig. Carré, tolto da un suo articolo sopra una nuova curva da lui inventata, riportato nell'anno 1705 dell'istessa raccolta e che singolarmente conferma ciò che nella pag. 4. ed altrove ho osservato. Egli è il seguente:

Quoique la considération des lignes courbes ne paroisse pas d'un grand usage, et que le public ait coutume de regarder ces sortes de speculations comme des reveries de gens oisifs, il est bon de lui répeter qu'il y en a nombre dont on a tiré de grandes utilités, comme la parabole pour le jet des bombes, la cycloide pour regler les pendules, et plusieurs autres dont il est inutile de faire ici le detail. Si les premiers qui ont pensé à ces courbes les avoient négligées par cette raison qu'ils n'en connoissoient pas les usages, ils nous auroient privés de ces avantages qu'on en retire. L'on ne doit donc pas regarder ces recherches comme des simples curiosités; et même quand c'en seroit, on ne doit pas les négliger. * * * * *L'on a cru devoir faire ce petit raisonnement pour fermer la bouche, si cela se peut, à ceux qui ne font que demander: à quoi cela sert-il? comme si l'on ne devoit jamais s'appliquer qu'à ce qui est utile actuellement! et sans doute qu'on s'appliqueroit à bien peu de choses.*

Questi passi convalidano due punti in mio favore; in primo luogo confermano quanto nella pag. 4. e 27. io medesimo avevo accennato, e quanto in varj passi delle presenti osservazioni ho sostenuto. In secondo luogo, l'opinione così espressa del celebre

Fontenelle, allora Segretario dell' Accademia di Francia, prova non esser mai nè *dagli Analisti* nè da altri dotti stata *trascurata* cosa alcuna, che servita fosse a comunque arricchire le Scienze; prova che se alla detta Accademia (o anche altrove) fosse stato presentato un lavoro anche meno elaborato del mio, non avrebbe questa mancato di pubblicarlo o almeno di accennarlo; prova finalmente non esser meno stimabil cosa il voltarsi alle Matematiche *pure* di quella di coltivare le fisiche Scienze, e per quanto meno immediata ne comparisca l' utilità, non compete all' autorità di alcun uomo vivente l' asserire che sieno inutili, o *in conto alcuno* da curarsi.

Pertanto giovami ormai seguire le tracce dal medesimo chiarissimo opinante indicatami, invocare cioè all'esempio suo il giudizio del Pubblico sul mio lavoro, persuaso che questi darà il poco valore che merita all'accennato fortuito caso, quale non toglie alla mia fatica il neppur minimo pregio di cui vantarsi potesse.

Colgo l' occasione intanto di protestare, che quantunque in questo particolare di opinione diametralmente opposta a quella del dotto mio avversario, ciò in nulla diminuisce il rispetto che giustamente gli debbo per la sua ben nota profonda dottrina nelle matematiche Scienze. E grato insieme debbo essergli dei non meritati elogi che in alcune parti del suo rapporto mi largisce, assicurandolo bensì, che mentr' io con fermezza e verità ripudio ogni accusa di plagio, io pur troppo però indegno mi conosco dell'epiteto di *egregio analitico scrittore*, quale ben con ragione io temo di non poter in tutto il corso della mia vita acquistare.

Siena li 25. Settembre 1837.

Enrico Montucci

(Avendo l'Autore, in conseguenza della differenza di opinione nei due Rapporti Accademici rilevata, interpellato due suoi Matematici di questa Città ad emettere il loro privato parere, essi previo maturo esame hanno cortesemente annuito ai suoi desiderj. È inutile soggiungere che l'autore conserva depositati da uno di detti pareri nel suo fer no indicati, poichè ov dà prova sufficiente col rendere tanto l'un voto che l'altro di pubblica ragione.)

Io sottoscritto sono di parere, che la Memoria sulla Curva annodata che l'autore chiama Strefoide, sia un lavoro originale, poichè 1. Nel cercare l'equazione di quella curva vien seguita una strada affatto diversa da quella che per il medesimo oggetto tennero il P. Riccati e l'Agnesi; 2. Le proprietà interessanti che essa gode sono state largamente sviluppate dal sig. Montucci, e non accennate nè presentite dagli indicati Matematici che sembrano essersi eventualmente imbattuti in una equazione identica, senza curarsi, con non lodevole negligenza, di sottoporla a minuto e rigoroso esame; 3. L'Autore ha saputo dettagliare ogni parte del suo ritrovato con tal padronanza dei metodi analitici, che in simile grado impossibile a praticarsi, ove il soggetto non sia proprio, e profondamente sentito.

Non convengo poi col Sig. Montucci della prima parte della sua memoria, ove egli crede esaurito il campo delle Matematiche pure, poichè io leggo opinione che esse, al pari d'ogni altra Scienza, non abbiano alcun limite al loro progresso. Se la Chimica e la Fisica sono, come egli dice, siccome di giornalieri trionfi, mentre si scorge quasi stazionaria la Matematica, ciò probabilmente avverrà dalla esuberanza dei mezzi che si confronta dell'uso che più fossene attualmente, ci offrono le Matematiche pure, esuberanza che può anche congiunsi in differenza col vantaggio della società, ed in questo caso i Matematici avranno di bel nuovo invitati a riprendere con ardore uno studio che al presente sembra destare ben poche speranze.

Credo erroneo l'asserto che la Strefoide possa applicarsi alla descrizione dei Caulicoli del Capitello Corintio. Un siffatto sistema non permetterebbe la delineazione, non che dell'intero caulicolo, ma neppure del primo giro della sua elice consolide; e quando ancora la Strefoide servisse a compirlo, ne avverrebbe una perfetta somiglianza in tutti i caulicoli dell'ordine Corintio, resultato affatto contrario agli insegnamenti che ci ignota dati dai buoni Architetti, dietro lo studio dei più accreditati antichi monumenti nei quali un medesimo ordine si scorge con sommo artifizio modificato e nelle forme e nelle dimensioni, a seconda dell'uffizio cui destinavasi la intera fabbrica. Crederei insolamente che un risultato di qualche utilità potesse ottenersi da questa curva per la descrizione delle centinature Architettoniche, impiegandola al disegno di modini congruenti alla Scena.

In ogni caso questo primo lavoro del sig. Montucci mi sembra tale per se stesso da far nascere in chi ama i progressi della Scienza, il desiderio

rio di vedere diretti ad oggetti di utilità più immediata le cognizioni ed i talenti che in modo non dubbio ha manifestati l'autore

Siena li 28 Settembre 1837.

GIUSEPPE PIANIGIANI
P. Prof. di Fisica nell' I. e R. Università.

Io sottoscritto, coerente sempre al mio sentimento in altra occasione già emesso sulla onore Strofoide Montucciana, quindi illustrato e pubblicamente letto, non posso non approvare le dotte osservazioni apologetiche del Sig. Dott. Enrico Montucci, il quale perciò da me si reputa Promotore assoluto della medesima. In fede ec.

Siena dal mio studio li 28 Settembre 1837.

NICCOLÒ MARI
All' I. e R. Università P. P. d'Algebra

ERRORI OCCORSI IN ALCUNE COPIE

Pag. 5.	l. 19	inv. di:	mz . .	leggi mZ
„ 6.	„ 14.	„	parti	„ punti
„ 7.	„ 5.	„	$(1 a.\beta)$	„ $(2 a \beta.)$
„ 9.	„ 18.	„	z	„ Z
„ 11.	„ 2.	„	$(2a-x^2$.	„ $(2a-x)^2$
„ ib.	„ 5.	„	all' origine	„ al centro
„ 14.	„ 29.	„	retti . .	„ rettangoli
„ 21.	„ 3.	„	$\frac{u^2}{\left(a1-\frac{\text{sn}^2\varphi}{\text{cs}\varphi}\right)}$	„ $\frac{u^2}{a\left(1-\frac{\text{sn}^2\varphi}{\text{cs}\varphi}\right)}$
„ ib.	„ 14.	„	$MP = u\text{tg}\varphi$	„ $PT = u\text{tg}\varphi$
„ 22.	„ 23.	„	Pm . . .	„ PM

NB. Sono erronee le espressioni della tangente e della normale dal centro, pag. 11. e quella di snξ, pag 12. § 18. ove il termine $(2a^2 - 3x^2)$ deve correggersi $(2a^2 - x^2)$.

NB Sono erronee le espressioni della tangente e
normale dal centro, pag. 11. e quella di fnξ, pag. 12
ove il termine $(2a^2 - 3x^2)$ deve correggersi $(2a^2$